

Fiche 6

Exemples d'applications des systèmes d'équations linéaires

Objectif : A la fin de ce cours, l'apprenant devra être capable de résoudre un problème faisant intervenir un système d'équations linéaires ayant un faible nombre d'inconnues.

Sommaire

6.1	Application en nutrition	55
6.2	Application à l'équilibrage des équations chimiques . . .	56
6.3	Détermination du vecteur d'équilibre (ou vecteur stationnaire) d'une Chaîne de Markov Homogène	57
6.4	Exercices de travaux dirigés	62

6.1 Application en nutrition

Exercice d'application 6.1 Le tableau suivant donne le nombre de milligrammes de vitamines A, B et C contenus dans un (01) gramme de trois aliments différents. Un diététicien veut préparer un repas qui fournit 350 mg de vitamine A, 400 mg de vitamine B et 500 mg de vitamine C. Déterminer les nombres de grammes respectifs x_1 , x_2 et x_3 des aliments 1, 2 et 3 à inclure dans la composition du repas (on donnera la valeur exacte puis un arrondi à deux chiffres).

	Aliment 1	Aliment 2	Aliment 3
Vitamine A	20	30	40
Vitamine B	40	20	35
Vitamine C	50	40	10

►►► *Indications :* On peut représenter la situation à l'aide du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 20x_1 + 30x_2 + 40x_3 &= 350 \\ 40x_1 + 20x_2 + 35x_3 &= 400 \\ 50x_1 + 40x_2 + 10x_3 &= 500 \end{cases}$$

qui se traduit sous la forme matricielle $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 40 & 20 & 35 \\ 50 & 40 & 10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 350 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

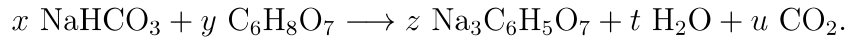
On a $\det(A) = 40\,500 \neq 0$ donc

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \frac{1}{40\,500} \begin{pmatrix} -1200 & 1300 & 250 \\ 1350 & -1800 & 900 \\ 600 & 700 & -800 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 350 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{40\,500} \begin{pmatrix} 225\,000 \\ 202\,500 \\ 90\,000 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 5.56 \\ 5 \\ 2.22 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

◇

6.2 Application à l'équilibrage des équations chimiques

Exercice d'application 6.2 Certains remèdes contre le rhume utilisent la réaction du bicarbonate de sodium avec l'acide citrique en solution. Ladite réaction produit du citrate de sodium, de l'eau et du dioxyde de carbone selon l'équation



Equilibrer cette équation puis déterminer les plus petites valeurs possibles des coefficients.

►►► *Indications* : En considérant les nombres d'atomes de sodium, d'hydrogène, de carbone et d'oxygène respectivement, on peut représenter la situation à l'aide du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x & -3z & & & = & 0 \\ x & +8y & -5z & -2t & & = & 0 \\ x & +6y & -6z & & -u & = & 0 \\ 3x & +7y & -7z & -t & -2u & = & 0 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$, on obtient

$$\begin{cases} x & -3z & & & = & 0 \\ & 8y & -2z & -2t & & = & 0 \\ & 6y & -3z & & -u & = & 0 \\ & 7y & +2z & -t & -2u & = & 0 \end{cases}$$

En simplifiant L_2 par 2 puis en faisant $L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_2$, $L_4 \leftarrow 4L_4 - 7L_2$, on obtient

$$\begin{cases} x & -3z & & = 0 \\ & 4y & -z & -t & = 0 \\ & & -3z & +3t & -2u & = 0 \\ & & 15z & +3t & -8u & = 0 \end{cases}$$

Enfin, en faisant $L_4 \leftarrow L_4 + 5L_3$, on obtient :

$$\begin{cases} x & -3z & & = 0 \\ & 4y & -z & -t & = 0 \\ & & -3z & +3t & -2u & = 0 \\ & & & 18t & -18u & = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce dernier système du bas vers le haut, on obtient successivement $t = u$, $z = u/3$, $y = u/3$ et $x = u$. Comme les coefficients sont entiers, la plus petite valeur de u est 3 d'où $(x, y, z, t, u) = (3, 1, 1, 3, 3)$. $\diamond$

6.3 Détermination du vecteur d'équilibre (ou vecteur stationnaire) d'une Chaîne de Markov Homogène

Soient $\pi^{(n+1)}$ et $\pi^{(n)}$ deux vecteurs d'état consécutifs d'une chaîne de Markov Homogène (CMH) avec une matrice de transition P . On sait que $\pi^{(n+1)} = P\pi^{(n)}$ et $\pi^{(n)} = P^n\pi^{(0)}$. On s'intéresse au comportement à long terme du vecteur d'état $\pi^{(n)}$ c'est-à-dire à la limite de $\pi^{(n)}$ (si elle existe) lorsque $n \rightarrow \infty$. Il se pose alors deux questions : (1) comment déterminer si la limite de $\pi^{(n)}$ lorsque $n \rightarrow \infty$ existe ? (2) si une telle limite existe, comment la calculer ?

Considérons d'abord la définition suivante :

Définition 6.1 Une matrice de transition P est dite *régulière* s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que tous les éléments de la matrice P^r soient strictement positifs.

Énonçons maintenant un théorème très important dans la théorie de chaînes de Markov :

Théorème 6.1 ([4]) *Si une chaîne de Markov a une matrice de transition régulière P , alors, quelque soit $\pi^{(0)}$, le vecteur d'états $\pi^{(n)}$ de cette chaîne admet une limite π lorsque $n \rightarrow \infty$. Cette limite π , appelée vecteur d'équilibre (ou vecteur stationnaire) de la chaîne, est définie de façon unique par la relation*

$$\pi = P\pi$$

et le fait que la somme des composantes de π est égale à 1.

Exemple 6.1 ([4]) Considérons une CMH à trois états notés 1, 2 et 3 dont la matrice de transition est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0.2 \\ 0.15 & 0.45 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

La matrice P est régulière (ici $r = 1$ car tous les éléments de P sont strictement positifs) donc il existe un vecteur d'équilibre $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)^T$ tel que

$$P\pi = \pi \quad \text{et} \quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.$$

On a

$$\begin{aligned} P\pi = \pi &\implies \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 & 0.2 \\ 0.15 & 0.45 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{pmatrix} 0.75\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.2\pi_3 \\ 0.15\pi_1 + 0.45\pi_2 + 0.4\pi_3 \\ 0.1\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.4\pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \\ &\implies \begin{cases} -0.25\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.2\pi_3 = 0 \\ 0.15\pi_1 - 0.55\pi_2 + 0.4\pi_3 = 0 \\ 0.1\pi_1 + 0.3\pi_2 - 0.6\pi_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En prenant en compte la condition $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, on tire $\pi_3 = 1 - \pi_1 - \pi_2$ d'où le système devient

$$\begin{cases} -0.25\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.2(1 - \pi_1 - \pi_2) = 0 \\ 0.15\pi_1 - 0.55\pi_2 + 0.4(1 - \pi_1 - \pi_2) = 0 \\ 0.1\pi_1 + 0.3\pi_2 - 0.6(1 - \pi_1 - \pi_2) = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} -0.45\pi_1 + 0.05\pi_2 = -0.2 \\ -0.25\pi_1 - 0.95\pi_2 = -0.4 \\ 0.7\pi_1 + 0.9\pi_2 = 0.6 \end{cases}$$

soit encore

$$\begin{cases} 0.45\pi_1 - 0.05\pi_2 = 0.2 \\ 0.25\pi_1 + 0.95\pi_2 = 0.4 \\ 0.7\pi_1 + 0.9\pi_2 = 0.6 \end{cases}$$

La troisième équation étant la somme des deux premières, on peut écrire plus simplement

$$\begin{cases} 0.45\pi_1 - 0.05\pi_2 = 0.2 \\ 0.25\pi_1 + 0.95\pi_2 = 0.4 \end{cases}$$

Le déterminant du système est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0.45 & -0.05 \\ 0.25 & 0.95 \end{vmatrix} = 0.44 \neq 0$$

donc le système est de Cramer et on déduit

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{1}{0.44} \begin{vmatrix} 0.2 & -0.05 \\ 0.4 & 0.95 \end{vmatrix} = \frac{0.21}{0.44} \approx 0.477 \\ \pi_2 &= \frac{1}{0.44} \begin{vmatrix} 0.45 & 0.2 \\ 0.25 & 0.4 \end{vmatrix} = \frac{0.13}{0.44} \approx 0.295 \\ \pi_3 &= 1 - \pi_1 - \pi_2 \approx 0.228\end{aligned}$$

Le vecteur d'équilibre est donc

$$\pi \approx \begin{pmatrix} 0.477 \\ 0.295 \\ 0.228 \end{pmatrix}.$$

Ce qui signifie qu'à long terme, quelque soit la répartition initiale $\pi^{(0)}$, on aura approximativement 47.7% de la population sera dans l'état 1, 29.5% dans l'état 2 et 22.8% dans l'état 3.

Pour illustrer cette notion de convergence, nous considérons trois (3) valeurs possibles pour le vecteur d'états initial $\pi^{(0)}$ et nous calculons les valeurs successives du vecteur d'états $\pi^{(n)} = (\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \pi_3^{(n)})^T$ pour n variant de 1 à 10. Les valeurs de $\pi^{(0)}$ correspondent aux trois cas suivants :

- Cas 1 : $\pi^{(0)} = (0.5, 0.5, 0)^T$
- Cas 2 : $\pi^{(0)} = (0.7, 0, 0.3)^T$
- Cas 3 : $\pi^{(0)} = (0.4, 0.3, 0.3)^T$

Les figures 6.1, 6.2 et 6.3 donnent les évolutions respectives des composantes de $\pi^{(n)}$ en fonction du temps n . Pour tout $i = 1, 2, 3$, on remarque que pour tous les choix de $\pi_i^{(0)}$, $\pi_i^{(n)}$ converge vers π_i .

Remarque 6.1 La condition de régularité du théorème 6.1 est suffisante mais pas nécessaire. C'est-à-dire que si la matrice de transition n'est pas régulière, l'on ne peut rien dire.

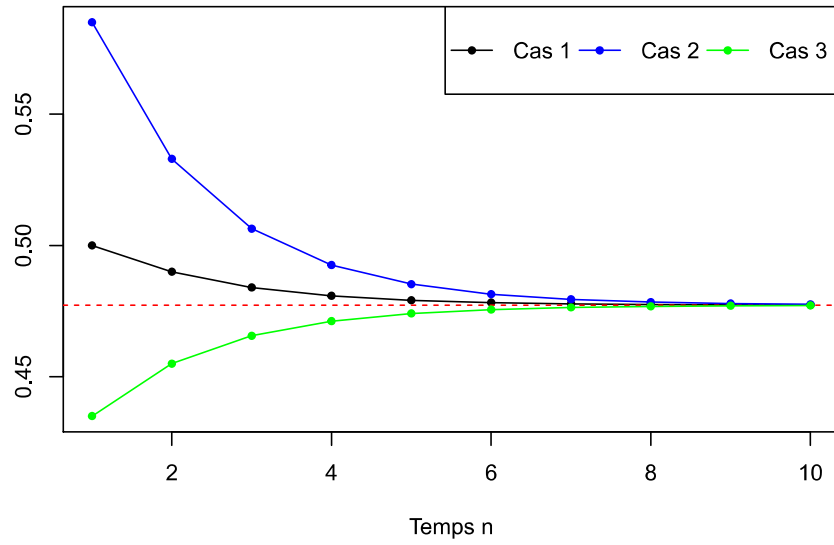


FIGURE 6.1 – Evolution de $\pi_1^{(n)}$ en fonction de n . On constate la convergence vers $\pi_1 \approx 0.477$ (en pointillés rouges)

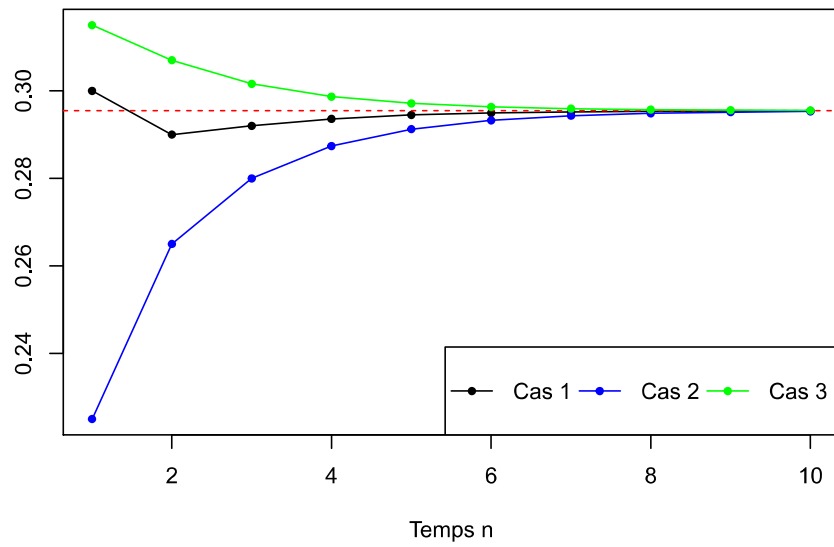


FIGURE 6.2 – Evolution de $\pi_2^{(n)}$ en fonction de n . On constate la convergence vers $\pi_2 \approx 0.295$ (en pointillés rouges)

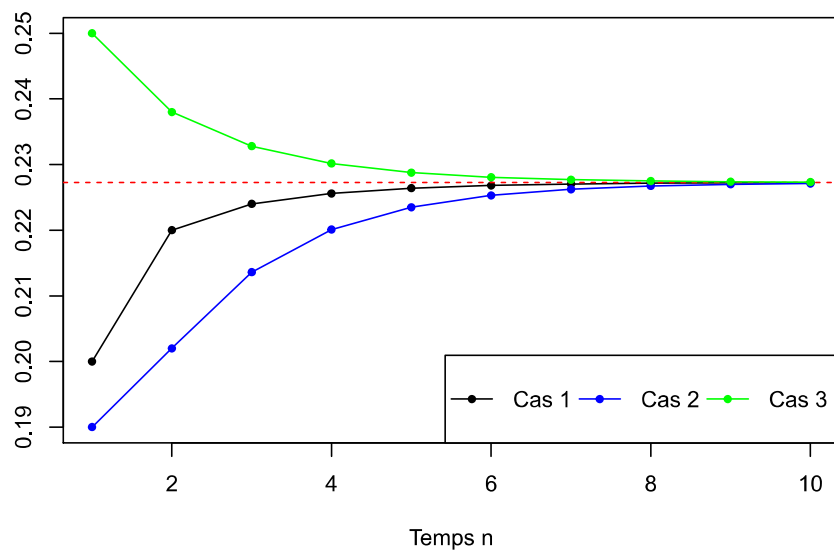


FIGURE 6.3 – Evolution de $\pi_3^{(n)}$ en fonction de n . On constate la convergence vers $\pi_3 \approx 0.228$ (en pointillés rouges)